

# **PROBABILIDAD DE RUINA Y ESTRATEGIAS DE BARRERA BAJO UN PROCESO DE POISSON COMPUESTO\***

**Antonio Alegre Escolano  
M. Mercè Claramunt Bielsa  
Maite Mármol Jiménez\*\***

## **RESUMEN:**

En este trabajo introducimos diferentes tipos de barreras de dividendos en el modelo clásico de la teoría de la ruina. Estudiamos la influencia de las estrategias de barrera sobre la probabilidad de ruina. Utilizando un método basado en las ecuaciones de renovación [Grandell (1.991)], alternativo al argumento diferencial [Gerber (1.975)], se obtienen las ecuaciones diferenciales parciales de la probabilidad de no ruina. Finalmente, mediante simulación, calculamos y comparamos las probabilidades de supervivencia con barreras de dividendos lineal y parabólica.

PALABRAS CLAVE: Teoría del riesgo, Barreras de dividendos, Procesos de renovación, Simulación.

## **ABSTRACT**

In this paper we introduce different kinds of dividend policies in the classical surplus process in an insurance company. We study the influence of barrier strategies on the solvency and ruin probability. A method based on renewal equations [Grandell (1.991)], alternative to differential argument [Gerber (1.975)], is used to get the partial differential equations to solve survival probabilities. Finally we calculate and compare the survival probabilities using the linear and the parabolic dividend barrier, with help of simulation.

KEYWORDS: Risk Theory, dividend barriers, renewal process.

## **1. INTRODUCCIÓN**

En el modelo clásico de la teoría del riesgo se calcula la probabilidad de ruina de una cartera de riesgos que en particular podría ser la correspondiente a seguros no vida de un cierto ramo. El estudio de la solvencia en el modelo clásico se lleva a cabo aplicando dos métodos: el método diferencial y el método alternativo o de renovación.

En este trabajo estudiamos el modelo clásico introduciendo políticas de reparto de dividendos. Una política de reparto de dividendos implica una regla de decisión sobre la parte de beneficios que se integrarían en las reservas, repartiéndose el resto en forma de dividendos.

(\* ) Original recibido en marzo de 2000 y revisado en febrero de 2001.

(\*\* ) Profesores del Dpto. de Matemática Económica, Financiera y Actuarial de la Universidad de Barcelona.

La forma de introducir en el modelo matemático las estrategias de reparto es mediante las barreras de dividendos,  $b(t)$ , que producirán cambios en el proceso de acumulación de reservas. Así, cuando las reservas alcanzan el nivel de la barrera se mantienen en ella hasta la ocurrencia del siguiente siniestro, mientras, todos los excesos se van repartiendo.

Esta ampliación del modelo dará lugar a cambios en la probabilidad de ruina. Para conseguir la ecuación que nos determine la probabilidad de supervivencia en el modelo modificado se utilizan los dos enfoques comentados en el modelo sin barrera: enfoque diferencial y enfoque basado en las ecuaciones de renovación.

En este trabajo se usará el planteamiento alternativo. Este argumento es, tal y como se comenta en Grandell (1.991, p.5), más correcto matemáticamente que el método diferencial. El uso de este enfoque nos permitirá plantearnos políticas de dividendos alternativas a las estudiadas en la literatura actuarial existente, y para las que el uso del enfoque diferencial no es aplicable.

En la literatura actuarial se ha estudiado el efecto en la probabilidad de ruina y su complementaria de supervivencia de la introducción de diversos tipos de barreras. En caso de la barrera constante  $b(t)=b_0$ , evidentemente, la probabilidad de ruina es uno, como se comenta en Bühlmann (1.970, p. 165). También se ha estudiado en Gerber (1.981) el efecto de la barrera lineal  $b(t)=b_0+a \cdot t$ , en el caso concreto de función de distribución de la cuantía de los siniestros exponencial. En Siegl (1.996) se plantea esa misma barrera y se soluciona para los casos de exponencial mixta y gamma.

Usaremos la teoría de la renovación para encontrar las ecuaciones que nos determinan la probabilidad de no ruina en el caso de la barrera lineal. A continuación se introducirán nuevos tipos de barreras no estudiadas hasta ahora, que modificarán el proceso clásico de la teoría del riesgo: La barrera asintótica y la barrera parabólica.

En el caso de la barrera asintótica, como existe un tope en la acumulación de reservas nos encontramos con la misma peculiaridad que en la barrera constante, es decir, que la probabilidad de ruina es uno.

Realizamos un estudio comparativo entre las probabilidades de ruina obtenidas en el caso de que la cuantía de los siniestros siga una distribución exponencial, cuando modificamos el proceso con barrera lineal y parabólica.

Junto con la probabilidad de ruina existen otras magnitudes cuyo análisis presenta interés para el estudio completo de la solvencia de las entidades aseguradoras si se tienen en cuenta las políticas de reparto de dividendos. Una de dichas magnitudes es precisamente el valor actual de los dividendos, que será objeto de estudio en futuros trabajos.

## 2. MODELO

En el modelo clásico de la Teoría del Riesgo se considera que el número de siniestros sigue una distribución discreta de Poisson de parámetro  $\lambda$  y la cuantía individual del siniestro

una distribución continua  $F(z)$ . Como consecuencia de utilizar una distribución de Poisson en el número de siniestros, el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos siniestros consecutivos puede ser modelizado mediante una distribución exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$ .

El cálculo de la probabilidad de ruina bajo estas hipótesis es un tema ampliamente tratado en la literatura actuarial. El cálculo de esa probabilidad,  $\psi(u)$ , se realiza en plano infinito (probabilidad de ruina última) y tiempo continuo (utilizando como unidades temporales el año), según la clasificación realizada por Bühlmann (1.970, p.133), siendo:

$$\psi(u) = P[R(t) < 0]$$

donde el proceso de las reservas viene determinado por:

$$R(t) = u + c \cdot t - S_t$$

Donde  $u$  es el nivel inicial de las reservas,  $R(0) = u$ , es el proceso de siniestralidad agregada hasta el momento  $t$ , es decir la suma de la cuantía individual de los siniestros ( $X_i$ ) ocurridos en el intervalo  $(0, t)$ ; es la intensidad de prima, es decir, el ingreso de la compañía por primas en un instante  $t$ , considerado tradicionalmente en la Teoría clásica del Riesgo constante en el tiempo lo que implica suponer un volumen de la cartera estable (proceso de riesgo estacionario). Se cumple el principio de suficiencia de las primas  $c > \lambda \cdot E[Z]$ . Consideraremos  $\rho$  como el recargo de seguridad, y  $c = \lambda \cdot E[Z] \cdot (1 + \rho)$  por lo que  $\rho = \frac{c}{\lambda \cdot E[Z]} - 1$

La probabilidad de supervivencia de la compañía será la complementaria de la probabilidad de ruina:

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

siendo  $T$  el momento de ruina:

$$T = \{\min t | R(t) < 0\}$$

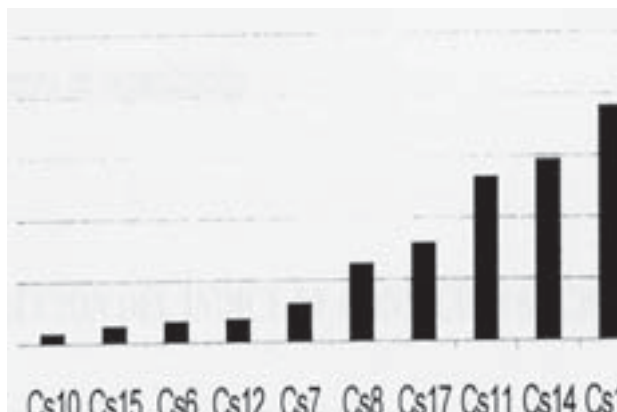
En la Figura 1 representamos la trayectoria del proceso clásico de las reservas.

Una primera aproximación para la determinación de la ecuación que permite obtener la probabilidad no ruina es el argumento diferencial, basado en el teorema de la probabilidad total, usado por Cramer (1.930,p.75):

$$\phi(u) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \phi(u + c \cdot dt) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi(u + c \cdot dt - z) \cdot dF(z)$$

donde  $(1 - \lambda \cdot dt)$  es la probabilidad de que no ocurra siniestro en un intervalo  $dt$ .

**FIGURA 1**



Un planteamiento alternativo, propuesto por Feller (1.971,p 183), Gerber (1.975, p. 114) y Grandell (1.991, p.5) , es el basado en las ecuaciones de renovación. Como el proceso de Poisson es un proceso de renovación, y la ruina no puede producirse antes del momento de ocurrencia del primer siniestro, tenemos:

$$\phi(u) = E[\phi(u + c \cdot t - z)] = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - z) \cdot dF(z) \cdot dt$$

Si introducimos estrategias de reparto de dividendos mediante la modificación del modelo con la introducción de diferentes barreras de dividendos  $b(t)$  la dinámica de las reservas en el tiempo vendrá dada por:

$$\begin{aligned} dR(t) &= c \cdot dt - dS_t, & \text{si } R(t) < b(t) \\ dR(t) &= c \cdot db(t) - dS_t, & \text{si } R(t) = b(t) \end{aligned}$$

Estudiamos en los siguientes apartados la probabilidad de ruina para diferentes tipos de barreras.

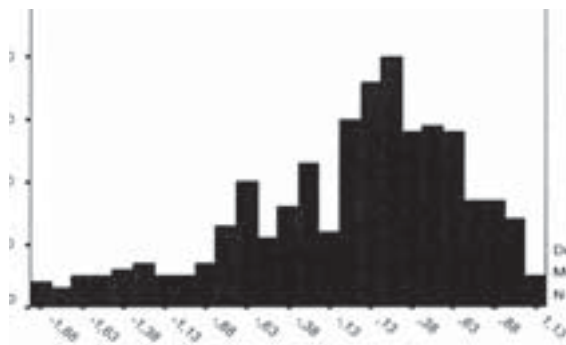
### 3. BARRERA DE DIVIDENDOS LINEAL

Consideramos una barrera lineal  $b(t) = b_0 + a \cdot t$ , siendo  $b_0 \geq 0$  el nivel inicial de la barrera, y  $a$  la pendiente de la recta, es decir el incremento instantáneo aceptable por la compañía en el nivel máximo de reservas a acumular, cumpliéndose que  $0 < a < c$ , condición necesaria para asegurar que en algún momento  $t$  el proceso de las reservas alcanzará la barrera de dividendos.

La probabilidad de no ruina  $\phi(u, b_0)$  será función de dos variables: el valor inicial de las reservas  $u$ , y el nivel inicial de la barrera  $b_0$ , cumpliéndose  $0 \leq u \leq b_0$ , condición lógica ya que el modelo con reparto de dividendos impide que el nivel de las reservas esté por encima del nivel de la barrera de dividendos.

En la Figura 2 podemos observar la modificación que sufre el proceso clásico de las reservas cuando introducimos una barrera de dividendos lineal.

**FIGURA 2**



En Gerber (1.981), se utiliza el planteamiento diferencial:

$$\phi(u, b_0) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \phi(u + c \cdot dt, b_0 + a \cdot dt) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi(u - z, b_0) \cdot dF(z) \tag{3.1}$$

siendo  $(1 - \lambda \cdot dt)$  la probabilidad de que no ocurra siniestro en un intervalo  $dt$ .

Operando sobre (3.1) y teniendo en cuenta que:

$$\phi(u + c \cdot dt, b_0 + a \cdot dt) = \phi(u, b_0) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0}$$

Llegamos a la expresión:

$$c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \lambda \cdot \phi(u, b_0) + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u - z, b_0) \cdot dF(z) = 0 \tag{3.2}$$

**3.1. PLANTEAMIENTO ALTERNATIVO**

Como ya se ha comentado en la introducción, la probabilidad de no ruina sin barrera puede obtenerse con el planteamiento basado en las ecuaciones de renovación:

$$\phi(u) = E[\phi(u + c \cdot t - z)] = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - z) \cdot dF(z) \cdot dt$$

En este trabajo se utiliza este enfoque para la obtención de la probabilidad de supervivencia con barrera lineal:

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u+c \cdot t-z, b_0+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \int_0^{b_0+a \cdot t} \phi(b_0+a \cdot t-z, b_0+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

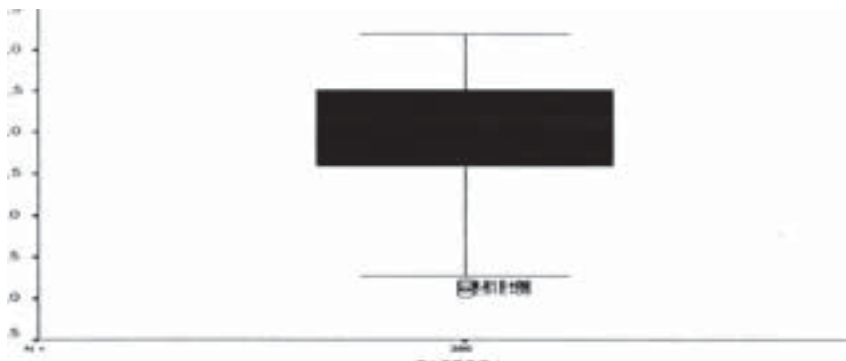
siendo  $t^*$  el punto de corte entre  $u+c \cdot t$  y  $b_0+a \cdot t$ :

$$t^* = \frac{b_0 - u}{c - a}$$

La primera de las integrales dobles de (3.3) corresponde al caso en que el primer siniestro ocurra antes del punto de corte, en ese caso no se ha alcanzado la barrera y por tanto el nivel de reservas es  $u+c \cdot t-z$ . El segundo sumando de (3.3) indica el caso en que ese primer siniestro se produzca una vez que las reservas hayan alcanzado la barrera, el nuevo nivel de reservas será  $b_0+a \cdot t-z$ .

La representación gráfica de los dos sumandos de la ecuación (3.3) aparece en la Figura 3.

**FIGURA 3**



En el Anexo A se desarrolla matemáticamente la expresión (3.3) que nos lleva a la ecuación:

$$c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \lambda \cdot \phi(u, b_0) + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u-z, b_0) \cdot dF(z) = 0$$

Expresión esta última coincidente con (3.2)  $F(z)$ . En el caso concreto de que siga una distribución exponencial normalizada (con esperanza unitaria), obtenemos una ecuación en derivadas parciales (EDP) de segundo orden.

$$c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0 \tag{3.4}$$

con las siguientes condiciones de contorno necesarias para la obtención de la correcta solución de  $\Phi(u, b_0)$  como probabilidad de no ruina, tal y como comenta Gerber (1.981):

- $\left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} = 0$ , la variación en la probabilidad de no ruina ante cambios del nivel de las reservas cuando este coincide con el nivel de la barrera es nula .
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = 1$  ( $b_0 \rightarrow \infty$ ), a medida que  $u$  tiende a  $\infty$  (uniformemente con  $b_0$ , ya que  $b_0 \geq u$ ), la probabilidad de no ruina tiende a 1.
- $\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{c-\lambda}{c}u}$ , hacer tender el punto inicial de la barrera a infinito, es equivalente a hacer desaparecer la barrera. Por tanto la probabilidad de no ruina con barrera tenderá a la probabilidad de no ruina sin barrera, que en el caso de cuantía de los siniestros exponencial toma esa expresión (Panjer, 1.992, p.374).

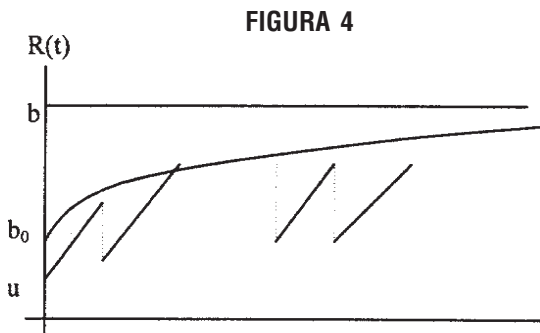
#### 4. BARRERA DE DIVIDENDOS ASINTÓTICA

Uno de los problemas de la barrera lineal es que permite la acumulación infinita de reservas. Nos podría interesar una barrera que limitase esa acumulación, de ahí nace la idea de una barrera asintótica.

La barrera asintótica propuesta es de la forma:

$$b(t) = b + (b_0 - b) \cdot e^{-\alpha t} \quad , \alpha \in R^+$$

y su gráfica la podemos ver en la Figura 4.



Podemos ver que  $b_0$  es el nivel inicial de la barrera,  $b$  el nivel de la asíntota y  $\alpha$  el parámetro que indica la velocidad de aproximación de la barrera a la asíntota y que puede ser interpretado como un tanto instantáneo.

El tope que impone esta barrera en  $b(\infty)=b$ , de igual forma que ocurría con la barrera constante, provoca que la probabilidad de ruina sea 1. Pero aunque desde el punto de vista de la probabilidad de ruina la barrera constante y la barrera asintótica sean idénticas no lo son desde el punto de vista de los dividendos repartidos en cada una de ellas. El cálculo de los valores actuales de los dividendos repartidos para estos y otros tipos de barreras será tema de estudio en otro trabajo.

### 5. BARRERA DE DIVIDENDOS PARABÓLICA

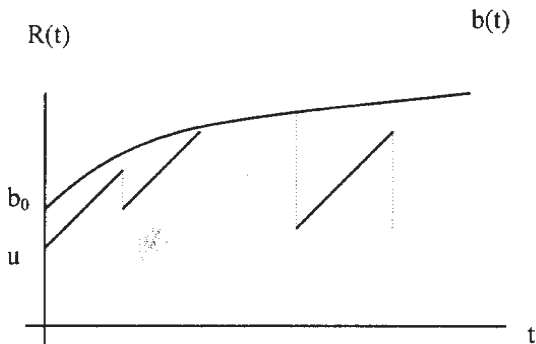
Con la barrera parabólica nos encontramos con que al desaparecer el valor máximo de acumulación de las reservas, nos podremos plantear el cálculo de la probabilidad de supervivencia.

La función que representa la barrera parabólica será:

$$b(t) = \sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}$$

siendo  $b_0$  la ordenada en el origen y  $\beta$  la tasa que nos indica la variación de la cuantía máxima de reservas que la compañía decide acumular en cada momento  $t$ , ver Figura 5.

FIGURA 5



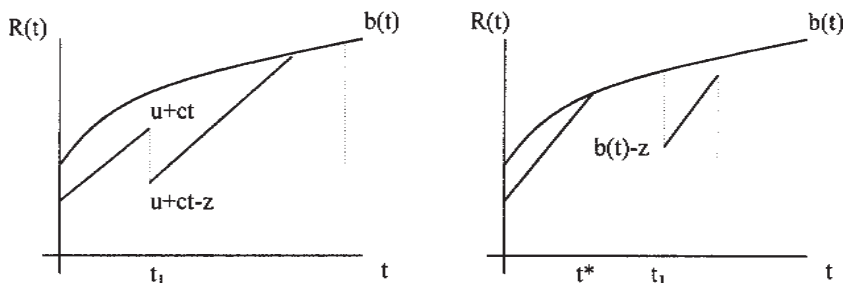
Para la determinación de la probabilidad de no ruina con esta nueva barrera utilizamos el planteamiento alternativo ya comentado en la barrera lineal:

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u+c \cdot t-z, \sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \int_t^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}} \phi(\sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}-z, \sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \tag{5.1}$$



La idea gráfica de los dos sumandos de la ecuación (5.1) aparece en la Figura 6.

**FIGURA 6**



A partir de (5.1), siguiendo un proceso similar al aplicado en el caso de la barrera lineal, y que se encuentra en el Anexo B obtendremos la correspondiente EDP.

$$\frac{\beta}{2 \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \cdot \phi(u, b_0) + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u-z, b_0) \cdot dF(z) = 0$$

En el caso concreto de la distribución exponencial, con  $F(z) = 1 - e^{-z}$ ,  $z > 0$ , llegamos a la correspondiente EDP:

$$c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + \frac{\beta}{2 \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{\beta}{2 \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- $\left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} = 0$
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = 1 \quad (b_0 \rightarrow \infty)$
- $\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{c-\lambda}{c} u}$

Si comparamos la estructura de esta ecuación diferencial con la obtenida en el caso de barrera lineal, observaremos la similitud existente entre ambas. En el caso de barrera lineal la expresión obtenida era:

$$c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0$$

La obtenida con barrera parabólica es la misma sustituyendo (pendiente de la barrera lineal) por la pendiente de la barrera parabólica en cero, es decir:

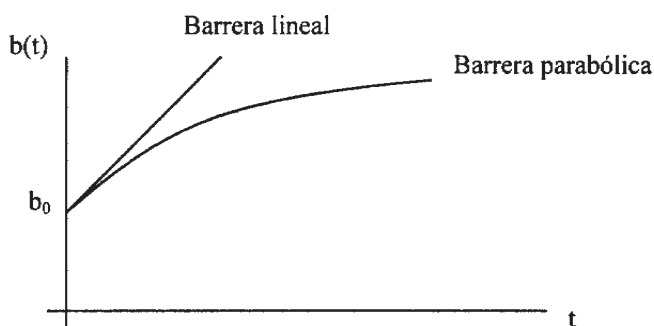
$$b'(0) = \frac{\beta}{2 \cdot b_0}$$

La solución de las EDP correspondientes a la barrera lineal y la barrera parabólica, a pesar de la similitud en la estructura de las ecuaciones, será muy diferente debido a que la correspondiente a la barrera lineal es una EDP de coeficientes constantes, mientras que para barrera parabólica la EDP resultante es de coeficientes variables, ya que en el coeficiente de la parcial cruzada y la parcial respecto a  $b_0$  aparece  $b_0$ .

Evidentemente la probabilidad de supervivencia será distinta cuando el proceso esté modificado con una barrera lineal con pendiente  $a$  y con una parabólica cuya pendiente en  $t=0$  también tenga valor (es decir cuando  $a = \frac{\beta}{2 \cdot b_0}$ ).

En la Figura 7 se puede observar como, intuitivamente, la probabilidad de supervivencia en el caso de barrera lineal será mayor, ya que se permite una mayor acumulación en el nivel de reservas.

**FIGURA 7**



## 6. APLICACIÓN NUMÉRICA

En este apartado calculamos la probabilidad de supervivencia cuando modificamos el modelo inicial, introduciendo las barreras definidas en los apartados anteriores.

En el caso de la barrera lineal resolveremos la ecuación diferencial parcial hallada en el apartado 2, y compararemos los resultados con los hallados mediante simulación. Para la barrera parabólica hallaremos la probabilidad de supervivencia mediante simulación. Finalmente haremos un estudio comparativo para ver como afectan estos dos tipos de barrera a la solvencia de la entidad aseguradora.

Los datos utilizados en todas las simulaciones son los siguientes:  $c = 1.5$ ,  $\lambda = 1$  y  $E[z] = 1$ .

Para las simulaciones se han diseñado programas propios en Fortran 77 que utilizan diversas subrutinas de la librería NAG para generar números aleatorios para diferentes distribuciones de probabilidad, en particular la G05DBF para generar números aleatorios distribuidos exponencialmente. El número de trayectorias simuladas es de 100.000, y los resultados son la media de 5 ejecuciones, suponiendo que las trayectorias que se mantienen "vivas" en el momento  $t = 100$  ya se consideran trayectorias no arruinadas.

### 6.1. BARRERA LINEAL

El resultado de la EDP de la expresión (3.2) es un proceso recursivo [Gerber (1.981)] que para  $u$  y diferentes valores de  $b_0$  nos daría:

$b_0 \backslash u$	0	0.3	0.5	1
0	0.256596			
0.3	0.302810	0.324918		
0.5	0.316858	0.357953	0.367854	
1	0.329807	0.388465	0.421155	0.464492

Podemos comprobar que para el mismo valor de  $u$ , a medida que incrementa el valor inicial de la barrera, la probabilidad de supervivencia incrementa debido a que el momento en que se alcanza la barrera se retrasa, permitiéndose más acumulación de reservas, y retrasando la ruina. Lo mismo ocurre cuando para el mismo valor de  $b_0$  incrementamos  $u$ . Si nos fijamos en la diagonal del cuadro, nos encontramos con situaciones en que  $b_0 = u$ , y a medida que nos desplazamos a la derecha, partimos de niveles más elevados, de ahí que la probabilidad de ruina sea menor.

El resultado de las simulaciones en el caso de la barrera lineal para  $a = 1.1$ :

$b_0 \backslash u$	0	0.3	0.5	1
0	0.256202			
0.3	0.302632	0.324746		
0.5	0.316768	0.357508	0.367498	
1	0.329914	0.389174	0.421402	0.465062

Las diferencias existentes entre los resultados de la EDP y los de la simulación pueden ser debidos a que en la simulación paramos el proceso en el momento  $t = 100$ .

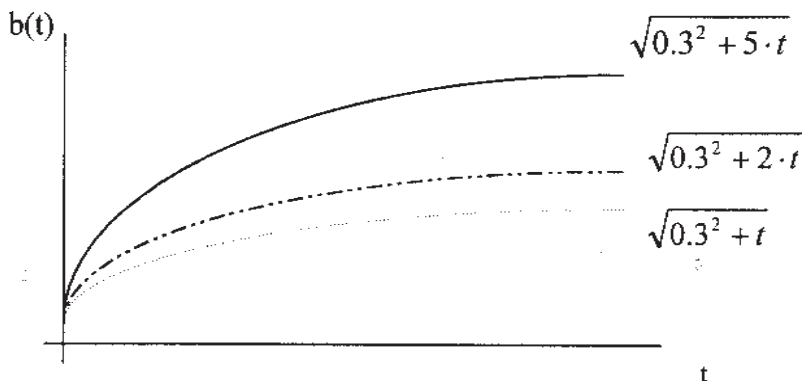
## 6.2 BARRERA PARABÓLICA

Hallaremos el valor de la probabilidad de supervivencia con barrera de dividendos parabólica mediante la simulación del proceso. En la Figura 8 se puede observar como varía la barrera parabólica para diferentes valores de  $\beta$  cuando  $b_0=0.3$ . Cuanto menor es el valor de  $\beta$  menor es el valor de la pendiente

Los valores de la probabilidad de supervivencia para diferentes  $\beta$ :

	$b_0 \setminus u$	<b>0</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>
$\beta = 5$	<b>0</b>	0.271133			
	<b>0.3</b>	0.271522	0.319003		
	<b>0.5</b>	0.27213	0.319765	0.346733	
	<b>1</b>	0.274655	0.323516	0.351447	0.406361
$\beta = 2$	$b_0 \setminus u$	<b>0</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>
	<b>0</b>	0.102504			
	<b>0.3</b>	0.103856	0.115944		
	<b>0.5</b>	0.106014	0.11908	0.124178	
	<b>1</b>	0.11508	0.131237	0.13954	0.149554
$\beta = 1$	$b_0 \setminus u$	<b>0</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>
	<b>0</b>	0.018439			
	<b>0.3</b>	0.019294	0.020622		
	<b>0.5</b>	0.020692	0.022582	0.022976	
	<b>1</b>	0.026458	0.029745	0.031242	0.032758

FIGURA 8



A medida que el valor de  $\beta$  disminuye, las probabilidades de supervivencia disminuyen, lo que al observar los gráficos ya podía intuirse: a menor  $\beta$  el crecimiento de la barrera parabólica es menor, por tanto, el tope que representa la barrera está más cerca del proceso de las reservas, limitando el crecimiento de  $R(t)$ .

### 6.3. COMPARACIÓN BARRERA LINEAL-BARRERA PARABÓLICA

En este apartado podemos realizar una doble comparación:

1. Recordando lo comentado al final del apartado 4, podemos hallar el valor de la probabilidad de supervivencia en el caso de la barrera lineal y parabólica cuando la pendiente en el punto inicial coincide. Gráficamente se podía observar, que en el caso de barrera de dividendos lineal, el valor de la probabilidad de supervivencia es mayor.

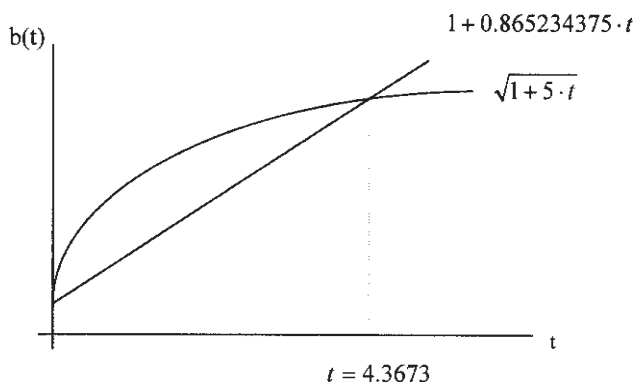
BARRERA	PARAMETROS	PENDIENTE EN $t=0$	$\phi(u, b_0)$
LINEAL	$a = 1.1$	$b'(0) = a = 1.1$	0.464492
PARABÓLICA	$\beta = 2.2$	$b'(0) = \frac{\beta}{2 \cdot b_0} = \frac{2.2}{2 \cdot 1} = 1.1$	0.173732

2. Mediante un programa de Fortran podemos hallar las barreras parabólica y lineal, que partiendo del mismo punto y para el mismo valor inicial de las reservas  $R(0) = u$  dan la misma probabilidad de supervivencia. A nivel de ejemplo:

Si consideramos la barrera parabólica  $b(t) = \sqrt{1+5 \cdot t}$  con  $u = 1$  y  $c = 1.5$ , mediante un proceso de simulación hallamos que la probabilidad de supervivencia es 0,4063619971.

La barrera lineal que hará que la probabilidad de supervivencia coincida con la hallada en la parabólica será  $b(t)=1+0.86523475 \cdot t$ , siendo el punto de corte el valor  $t=4.3673$ , ver Figura 9.

**FIGURA 9**



La importancia de esta comparación quedará patente cuando planteemos el valor actual de los dividendos. Elegiremos entre las dos barreras que provocan la misma probabilidad de ruina, en función de criterios basados en el valor actual de los dividendos repartidos.

## 7. CONCLUSIONES

El estudio de la solvencia de las entidades aseguradoras mediante el análisis de la probabilidad de ruina es un tema muy tratado en la literatura actuarial.

En este trabajo hemos introducido una alternativa al método diferencial para el cálculo de la probabilidad de supervivencia. El método diferencial era aplicable gracias a la utilización de un Proceso de Poisson en la modelización del coste de los siniestros que nos permitía conocer la probabilidad de ocurrencia de un siniestro en un intervalo. Una primera conclusión de este trabajo es que el método de renovación permite plantear políticas de dividendos alternativas a las estudiadas en la literatura actuarial. Así hemos introducido las barreras asintóticas y parabólicas.

Una segunda conclusión de este trabajo es que la utilización de la probabilidad de ruina como criterio de decisión para elegir la estrategia de dividendos no es útil por sí sola, ya que no permite, por ejemplo, diferenciar entre la barrera constante y asintótica.

En el trabajo hemos calculado la barrera lineal y la barrera parabólica que dan la misma probabilidad de ruina. Proponemos como criterio añadido para la elección de la política de dividendos óptima aquella que maximiza el valor actual de los dividendos.

Si nuestro criterio de decisión fuese la probabilidad de ruina, evidentemente optaríamos por no introducir ninguna barrera de dividendos, ya que en el modelo clásico se permite la acumulación libre de reservas, viéndose incrementada la solvencia de la cartera de riesgos.

## a

Al limitar la acumulación de reservas y repartir una parte en forma de dividendos la probabilidad de ruina será mayor. Por tanto para completar el estudio de la política de dividendos a elegir será fundamental el estudio del valor actual de los dividendos, tema que será objeto de estudio en futuros trabajos y en los que se aplicará el método alternativo de renovación.

## ANEXOS

## ANEXO A

Partimos de la expresión:

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) &= \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t-z, b_0+a \cdot t) dF(z) dt + \\ &+ \int_t^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{b_0+at} \phi(b_0+a \cdot t-z, b_0+a \cdot t) dF(z) dt \end{aligned} \quad (A.1)$$

Haciendo el cambio de variable  $u + ct = x$  sobre la expresión (A.1)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_0^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^x \phi\left(x-z, b_0+a \frac{x-u}{c}\right) dF(z) dx + \\ + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{x^*}^\infty e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^{b_0+a \frac{x-u}{c}} \phi\left(b_0+a \frac{x-u}{c}-z, b_0+a \frac{x-u}{c}\right) dF(z) dx \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\text{siendo } x^* = u + ct^* = \frac{cb_0 - au}{c - a}$$

Derivando (A.2) respecto a  $u$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \phi(u, b_0) + \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) dF(z) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda u}{c}} \int_{x^*}^\infty e^{-\frac{\lambda x}{c}} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x-z, b_0+a \frac{x-u}{c}\right) dF(z) dx - \\ &- \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z, b_0) dF(z) + \frac{\lambda}{c} (-\lambda) \int_t^\infty e^{-\lambda t} \int_0^{b_0+at} \phi(b_0+at-z, b_0+at) dF(z) dt \end{aligned} \quad (A.3)$$

Sobre (A.1) hacemos  $b_0 + at = x$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} e^{\frac{\lambda b_0}{a}} \int_b^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \int_0^{u+c \frac{x-b_0}{a}} \phi\left(u+c \frac{x-b_0}{a}-z, x\right) dF(z) dx + \\ + \frac{\lambda}{a} e^{\frac{\lambda b_0}{a}} \int_{x^*}^\infty e^{-\frac{\lambda x}{a}} \int_0^x \phi(u-z, x) dF(z) dx \end{aligned} \quad (A.4)$$

Derivando (A.4) respecto a  $b_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} &= \frac{\lambda}{\bar{a}} \phi(u, b_0) - \frac{\lambda}{\bar{a}} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) + \\ &+ \lambda \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, b_0+at) dF(z) dt - \\ &+ \frac{\lambda}{\bar{a}} a(-\lambda) \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, b_0+a) dF(z) dt \end{aligned} \tag{A.5}$$

Agrupando las dos derivadas (A.3) y (A.5), llegamos a:

$$\frac{\bar{a}}{\lambda} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} = \phi(u, b_0) - \int_0^u \phi(u-z, b_0) dF(z)$$

## ANEXO B

Partimos de la expresión

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) &= \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t-z, \sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}) dF(z) dt + \\ &+ \int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \beta t}} \phi(\sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t} - z, \sqrt{b_0^2 + \beta \cdot t}) dF(z) dt \end{aligned} \tag{B.1}$$

Haciendo  $u + ct = x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_0^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^x \phi\left(x-z, \sqrt{b_0^2 + \beta \frac{x-u}{c}}\right) dF(z) dx + \\ + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \beta \frac{x-u}{c}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \beta \frac{x-u}{c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \beta \frac{x-u}{c}}\right) dF(z) dx \end{aligned} \tag{B.2}$$

siendo  $x^* = u + ct^*$ , donde  $t^*$  es el punto de corte entre la barrera y  $u + ct$  derivando (B.2) respecto a  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \phi(u, b_0) + \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{\frac{\lambda x}{c}} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x-z, \sqrt{b_0^2 + \beta \frac{x-u}{c}}\right) dF(z) dx - \\ &- \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z, b_0) dF(z) + \frac{\lambda}{c} (-\lambda) \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \beta t}} \phi(\sqrt{b_0^2 + \beta t} - z, \sqrt{b_0^2 + \beta t}) dF(z) dt \end{aligned} \tag{B.3}$$



Haciendo el cambio de variable  $x = \sqrt{b_0^2 + \beta t}$  en (B.1):

$$\begin{aligned} & \frac{2\lambda}{\beta} e^{\frac{\lambda t_0^2}{\beta}} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\frac{\lambda x^2}{\beta}} x \int_0^{u + \frac{c(x^2 - t_0^2)}{\beta}} \phi\left(u + \frac{c(x^2 - b_0^2)}{\beta} - z, x\right) dF(z) dx + \\ & + \frac{2\lambda}{\beta} e^{\frac{\lambda t_0^2}{\beta}} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{\beta}} x \int_0^x \phi(x - z, x) dF(z) dx \end{aligned} \quad (B.4)$$

Derivando (B.4) respecto a  $b_0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = \frac{2\lambda b_0}{\beta} \phi(u, b_0) - \frac{2\lambda b_0}{\beta} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) + \\ & + \lambda \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct - z, \sqrt{b_0^2 + \beta t}) dF(z) dt - \\ & - \lambda \frac{2\lambda b_0}{\beta} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct - z, \sqrt{b_0^2 + \beta t}) dF(z) dt \end{aligned} \quad (B.5)$$

Agrupando las dos derivadas (B.3) y (B.5)

$$\frac{\beta}{2b_0} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + c \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \phi(u, b_0) + \lambda \int_0^u \phi(u - z, b_0) dF(z) = 0$$

**BIBLIOGRAFÍA**

- BÜHLMANN, H. (1.970): *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer Verlag, New York.
- CRAMER, H. (1.930): *On the Mathematical Theory of Risk*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm
- FELLER, W. (1.971): *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol II, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.
- GERBER, H. (1.975): *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Ed. Richard D. Irwin. Illinois.
- GERBER, H. (1.981): "On the Probability of Ruin in the Presence of a Linear Dividend Barrier". *Scandinavian Actuarial Journal*, 105-115
- GRANDELL, J. (1.991): *Aspects of Risk Theory*. Springer Verlag, New York.
- PANJER, H; WILLMOT, G. (1.992): *Insurance Risk Model*. Society of Actuaries.
- SIEGL, T; TICHY, R. (1.996): "Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung". *Mitteilungen der Schweizerische Aktuarvereinigung*. Heft 1/1.996.