PAPELES DE TRABAJO
Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales

Nº 14

# DISTANCIAS ECONOMICAS ENTRE DISTRIBUCIONES DE RENTA

Luis J. Imedio Olmedo

DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA Y ECONOMETRIA
UNIVERSIDAD DE MALAGA

# PAPELES DE TRABAJO

## CUADERNOS DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES



**GESTION, SUSCRIPCIONES Y PUBLICIDAD**
Estrella Ayala Moscoso
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Biblioteca
C/. El Ejido, s/n. 29071 Málaga
Telf. y Fax (95) 213 11 48

**EDITA**
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Málaga

**COLABORA**
Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico
de la Universidad de Málaga

**IMPRIME**
imagraf - Telf. 227 61 09

I.S.B.N. 84-7496-240-4
Depósito Legal: MA-685/94

Colabora con este Número:

*Asociación de Antiguos Alumnos de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Málaga*

DISTANCIAS ECONÓMICAS ENTRE DISTRIBUCIONES DE RENTA.

## 1. INTRODUCCIÓN.[1]

En el ámbito de las comparaciones del bienestar que proporcionan distintas distribuciones de renta, un concepto relativamente reciente es el de <u>distancia económica</u> entre tales distribuciones. Con él se pretende reflejar el grado de "riqueza" o bienestar de una población con respecto a otra. A diferencia de lo que sucede con los índices de desigualdad, no se trata de comparar una situación dada con la que resultaría tras un reparto igualitario de la renta, sino de evaluar la diferencia de bienestar <u>entre</u> dos poblaciones, comparando directamente sus respectivas distribuciones de renta.

Por lo tanto, las distancias vienen a ser una generalización de las medidas de desigualdad, en el sentido de que si en vez de realizar comparaciones entre poblaciones distintas, consideramos, para una población dada, la distancia existente entre la distribución de renta actual y otra más uniforme, lo que obtenemos es una evaluación de la desigualdad existente en dicha población. De hecho, veremos como ambos conceptos comparten algunas características y propiedades.

En lo que sigue la palabra distancia se utilizará en un sentido amplio. Como es sabido, en sentido estricto, la definición de espacio métrico es la siguiente:

Si A es un conjunto cualquiera, una aplicación $d: A*A \rightarrow R$ se dice que es una distancia definida en A si cumple las siguientes condiciones:

a) $d(x,y) \geq 0$.

b) $d(x,y) = 0 \rightleftarrows x = y$.

---

[1] Agradezco al Equipo de Investigación "Economía Cuantitativa del Bienestar" (Universidad de Málaga) la colaboración prestada para la edición de este trabajo.

c) $d(x,y) = d(y,x)$.

d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall$ x, y, z $\in$ A.

Al par (A,d) se le denomina espacio métrico.

En las distancias económicas no se cumplirá la condición b), y aunque ello suponga un inconveniente desde un punto de vista formal, es razonable que así sea. En efecto, si x e y son distribuciones de renta sobre sendas poblaciones, el que se verifique $d(x,y)=0$ significa que ambas distribuciones proporcionan el mismo nivel de bienestar a sus poblaciones respectivas; ahora bien, ello no tiene, necesariamente, que implicar el que ambas sean idénticas tanto en tamaño, como en la renta que percibe cada unidad económica. Parece, sin embargo, natural el que ambas distribuciones tengan alguna característica importante en común, que variará según sea la distancia considerada.

En este trabajo se exponen y analizan las distancias económicas propuestas hasta el momento. En la sección siguiente nos ocupamos de las <u>distancias éticas</u>: son aquellas que se definen a partir de una <u>función de bienestar social</u> que incorpora los juicios de valor y las preferencias de la sociedad. En la sección tercera se estudian las <u>distancias de tipo estadístico</u>, esto es, las construidas en base a la <u>función de distribución</u> de la variable renta. En ambos casos el bienestar se hace depender exclusivamente de la renta, lo que supone una simplificación dado que existen otros factores que contribuyen al bienestar de las unidades económicas que se consideren, especialmente si forman parte de los grupos de rentas más altas ó más bajas.

<u>NOTACION.</u> Para una población de n individuos, un perfil ó distribución de renta es un vector $x=(x_1,x_2,...x_n)$ cuyas componentes no son todas nulas, siendo $x_i \geq 0$ la renta percibida por el individuo i. Así, para una población de tamaño n, el conjunto de distribuciones se identifica con $R^n_+$, mientras que el conjunto de todos los posibles perfiles de renta es $D=\cup_n R^n_+$.

Si $W:D \rightarrow R$ es una función, denotaremos por $W^n$, $n \in N$, su restricción a $R^n_+$. Análogamente, si $d:D*D \rightarrow R$, denotaremos por $d_{n,m}$ la restricción a $R^n_+ * R^m_+$. Cuando no haya lugar a confusión, en lo que se refiere al tamaño de las poblaciones, utilizaremos la función W ó d, aunque se trate de restricciones.

Dado $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n_+$, se dice que y es una k-réplica de x si $y=(y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(n)})$, siendo $y^{(i)}=x$, por lo que $y \in R^{nk}_+$.

El vector de n componentes todas ellas iguales a 1, se representará por $1^n$. De este modo, $c.1^n=(c,c,\ldots,c)$.

## 2. DISTANCIAS ÉTICAS.

### 2.1.CONCEPTOS Y CONSIDERACIONES PREVIAS.

Sea $W : R^n_+ \rightarrow R$ una función de bienestar social (FBS)[2].

Si se pretende que las distancias económicas reflejen las diferencias de bienestar entre dos distribuciones de renta, x e y, una primera idea podría consistir en definir tal distancia como una función de la diferencia $W(x) - W(y)$. No es posible proceder así ya que, como es sabido, W tiene un significado ordinal, en el sentido de que $g \circ W$, siendo g una función real estrictamente creciente, dá lugar a la misma ordenación de perfiles de renta que W. Por ello es necesario considerar una cardinalización de W, lo que se consigue a través del concepto de renta equivalente de equidistribución.

Definición 1 : Dada la distribución $x \in R^n_+$, el nivel de renta equivalente igualmente distribuido(REE), $x_e$, es la renta per cápita que distribuida de forma igualitaria proporciona el mismo nivel de bienestar que el perfil x. Por lo tanto, cumple:

---

[2]. Asigna un número real a cada uno de los posibles estados sociales que pueden contemplarse en una comunidad, dando lugar a una ordenación reflexiva, completa, transitiva y contínua de los mismos.

$$W(x) = W(x_e.1^n) \qquad (1)$$

Este concepto fué introducido por Atkinson (1.970), Kolm (1.969) y Sen (1.973).

Para que exista la correspondencia $E : x \to x_e$ y sea, además, una aplicación contínua hay que imponer ciertas condiciones a la FBS W.

<u>Definición 2</u> : Se dice que W es una FBS <u>regular</u> si cumple:

a) W es contínua.

b) W es estrictamente creciente a lo largo de la recta de la igualdad. Es decir, si a>b, se tiene $W(a.1^n) > W(b.1^n)$. Por lo tanto, W es inyectiva sobre dicha recta.

Esta condición significa que si todos los individuos tienen el mismo nivel de renta, más renta es preferida a menos.

c) Cada superficie de nivel de W corta a la recta de la igualdad. Dada $x \in R^n{}_+$, existe a>0 tal que $W(x) = W(a.1^n)$.

Ello supone que cada perfil de renta es indiferente a otro en el que se dé la equidistribución.

Con ello, si W es regular, la condición c) implica la existencia de $x_e$, la b) implica la unicidad y a) la continuidad. En definitiva,

$$E: R^n{}_+ \to R_+ \qquad (2)$$
$$x \to x_e \quad \text{es una función contínua.}$$

Además, si a>0, $E(a.1^n) = a$, lo que supone que las superficies de indiferencia de E están numeradas.

Para comprobar que $x_e$ es una cardinalización de W vamos a establecer la siguiente

<u>Proposición 1</u> : Dada la distribución de renta $x \in R^n{}_+$, su REE asociada a la FBS regular W y a cualquier transformación

estrictamente creciente $g \circ W$, es la misma.

En efecto, si $W(x) = W(x_{1e}.1^n)$ y $g(W(x)) = g(W(x_{2e}.1^n))$, resulta $g(W(x_{1e}.1^n)) = g(W(x_{2e}.1_n))$. Al ser g estrictamente creciente es inyectiva, luego $W(x_{1e}.1^n) = W(x_{2e}.1^n)$. De ahí que $x_{1e} = x_{2e}$, al ser W regular.

<u>Definición 3</u> : Una FBS es S-cóncava si $W(Bx) > W(x)$, siendo B cualquier matriz biestocástica de orden n (matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son no negativos, y en la que todas sus filas y columnas suman la unidad).

W es estrictamente S-cóncava si $W(Bx) > W(x)$, para cualquier matriz biestocástica B que no sea una permutación (en estas sus elementos son iguales a cero ó a la unidad).

Se demuestra, como consecuencia de la desigualdad de Jensen, que si W es estrictamente S-cóncava, se verifica

$$x_e < m(x) \tag{3}$$

siendo m(x) la media aritmética de la distribución x.

En tal caso la diferencia $C = m(x) - x_e > 0$ representa el <u>coste de la desigualdad</u>, ya que es la renta per cápita que podría ahorrarse sin pérdida de bienestar social, si el resto se distribuyese de forma igualitaria.

Más adelante se enuncian algunas propiedades que se consideran deseables para las distancias económicas y que conllevan el que la aplicación E y, por lo tanto, la FBS correspondiente cumplan condiciones adicionales.

<u>Definición 4</u> : La FBS W se denomina <u>homotética</u> si es una transformación ordinal de una función linealmente homogénea. Esto es, $W(x) = g\ W^\wedge(x)$, siendo $W^\wedge$ homogénea de grado uno ($W^\wedge(cx) = cW^\wedge(x)$, $c>0$) y g una función creciente.

Blackorby y Donaldson (1.978) demuestran el siguiente

<u>Teorema 1</u> : La FBS W es homotética si y sólo si el índice de Atkinson - Kolm - Sen (AKS), $I_3 = 1 - x_e/m(x)$ es un índice relativo de desigualdad ($I_3(cx) = I_3(x)$, $c>0$).

En general, los índices relativos de desigualdad implican y están implicados por FBS homotéticas. Es el caso de los índices de Gini, Theil, coeficiente de variación,...Si I es un índice de desigualdad que es nulo en el caso de equidistribución, es inmediato a partir de la definición 4 la siguiente

<u>Proposición 2</u> : La FBS $W(x) = m(x)(1 - I)$ es homotética si y sólo si I es un índice relativo.

<u>Definición 5</u> : Se dice que la FBS W es <u>trasladable</u> si para todo perfil $x \in R^n_+$ y $c \in R$ tal que $x + c.1^n \in R^n_+$, se verifica $W(x) = g\ W^\circ(x)$, siendo g creciente y $W^\circ$ una función que cumple $W^\circ(x + c.1^n) = W^\circ(x) + c$.

En Blackorby y Donaldson (1.980) se establece el siguiente resultado

<u>Teorema 2</u> : La FBS W es trasladable si y solo si el índice de desigualdad de Blackorby - Donaldson - Kolm (BDK), $A_1(x) = m(x) - x_e$ es un índice absoluto ($A_1(x + c.1^n) = A_1(x)$).

Los índices absolutos de desigualdad implican y están implicados por FBS trasladables, en el sentido siguiente:

<u>Proposición 3</u> : La FBS $W(x) = m(x)(1 - I)$ es trasladable si y sólo si $m(x)I$ es un índice absoluto de desigualdad.

De los teoremas 1 y 2 Chakravarty (1.990) dá unas demostraciones más sencillas y directas que las inicialmente propuestas por los autores antes citados.

Existen FBS que son a la vez homotéticas y trasladables. Es el caso de las asociadas al índice de Gini, al coeficiente de variación ó al maximin rawlsiano.

Definición 6 : La aplicación E: $R^n_+ \to R$, $E(x) = x_e$, se dice que es distribucionalmente homogénea si cumple:

a) $E(cx) = cE(x)$, cualesquiera sean $c>0$ y $x \in R^n_+$.

b) $E(x + c.1^n) = c + E(x)$ para todo $c \in R$ y $x \in R^n_+$.

A partir de las definiciones 1,2,4 y 6 se obtiene un resultado que será útil al enunciar algunos axiomas de las distancias económicas.

Proposición 4 : Si W es una FBS regular, homotética y trasladable, la función $E(x) = x_e$, asociada a W, es distribucionalmente homogénea.

En efecto, si $x \in R^n_+$ y $c>0$, se tiene

$W((cx)_e.1^n) = W(cx) = cW(x) = cW(x_e.1^n) = W(cx_e.1^n)$ y como W es regular, $(cx)_e = cx_e$.

Análogamente, $(x + c.1^n)_e = c + x_e$.

## 2.2. DEFINICIÓN DE DISTANCIA ÉTICA. COHERENCIA DE UNA DISTANCIA CON UNA FUNCIÓN DE BIENESTAR SOCIAL.

Dado que con las medidas de distancia se pretenden reflejar las diferencias en el bienestar medio existente entre dos poblaciones y que REE, $x_e$, representa el nivel medio de bienestar en una población, parece razonable expresar la distancia entre dos perfiles de renta como una función de sus respectivas REE.

En concreto, Chakravarty y Dutta (1.987) proponen

Definición 7 : Una función $d : R^n_+ * R^n_+ \to R$ es una distancia ética si satisface las siguientes condiciones:

a) d es contínua.

b) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x_e = y_e$ para cualquier FBS regular.

c) $d(x,y) = d(y,x)$.

d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$, cualesquiera que sean $x,y,z$.

Diremos que d es un índice ético de distancia si cumple además la condición

e) $d(x,y) = f(E(x), E(y))$, donde $f : R^2_+ \rightarrow R^+$ y $E(x) = x_e$ es la REE asociada a una FBS regular.

En la definición anterior a d se le llama distancia por un abuso de lenguaje ya que la condición b) no exige que $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Por ello d no es realmente una distancia en $R^n_+$, sino sobre un conjunto de clases de equivalencia.

En $R^n_+$ definimos la siguiente relación:

$$x \; R \; y \text{ si y sólo si } x_e = y_e \tag{4}$$

Es inmediato que R es una relación de equivalencia.

Dado el perfil $x \in R_+$, denotaremos por $x^\wedge$ su clase de equivalencia. Es decir, $x^\wedge = [y \in R^n_+ : y_e = x_e]$. En el conjunto cociente $R^n_+/R$, cuyos elementos son las clases de equivalencia, se puede definir

$$d^\wedge(x^\wedge, y^\wedge) = d(x_1, y_1) \tag{5}$$

siendo $x_1 \in x^\wedge$, $y_1 \in y^\wedge$ representantes cualesquiera de las clases $x^\wedge$ e $y^\wedge$.

La definición (5) es correcta, en el sentido de que no depende de los representantes considerados, como es fácil comprobar.

La función $d^\wedge$ es efectivamente una distancia en $R^n_+/R$, ya que

$$d^\wedge(x^\wedge, y^\wedge) = d(x_1, y_1) = 0 \rightleftarrows x_{1e} = y_{1e} \rightleftarrows x^\wedge = y^\wedge.$$

y satisface las demás propiedades (simetría y desigualdad triangular). En definitiva, $(R^n_+/R, d\hat{})$ es un espacio métrico.

Hasta el momento ni el índice ético de distancia, ni la distancia $d\hat{}$ tienen una forma funcional concreta. Sólo sabemos que se ha de cumplir la condición e) de la definición 7.

Consideremos la aplicación

$$h: R^n_+/R \rightarrow R_+ \tag{6}$$

definida mediante $h(x\hat{}) = x_e$.

Es muy sencillo comprobar que h es una biyección. En virtud de ella, cualquier distancia definida en $R_+$ puede trasladarse al espacio cociente $R^n_+/R$. Si $d_0$ es una distancia cualquiera en $R^+$, se puede definir

$$d\hat{}_0(x\hat{},y\hat{}) = d_0(h(x\hat{}),h(y\hat{})) = d_0(x_e,y_e) \tag{7}$$

En definitiva, $R^n_+/R$ y $R^+$ son espacios métricos isométricos y, como tales, pueden identificarse, son un mismo espacio, aunque la naturaleza de sus elementos sea muy distinta.

En $R_+$ hay muchas posibilidades, de hecho infinitas, para definir una distancia. Vamos a considerar algunas de ellas.

Si a y b son números reales positivos, las aplicaciones que se definen a continuación son distancias:

$d(a,b) = |a - b|$ , es la distancia usual en R.

$d(a,b) = |1/a - 1/b|$

$d(a,b) = |a - b|^{1/p}$ , $p>1$

$d'(a,b) = d(a,b)/ 1 + d(a,b)$, siendo d cualquier distancia definida en $R^+$. En particular,

$d'(a,b) = |a - b| / 1 + |a - b|$

$d''(a,b) = \min(1, d(a,b))$, d como en el caso anterior.

Las correspondientes distancias inducidas en $R^n_+/R$ mediante la biyección $h(x\hat{}) = x_e$, vendrían dadas por:

$d\hat{}(x\hat{},y\hat{}) = |x_e - y_e|$ Esta dá lugar a la distancia económica entre dos distribuciones de renta que propuso Shorrocks (1.982) y para la cual se obtendrá, más adelante, un teorema de caracterización.

$d\hat{}(x\hat{},y\hat{}) = |1/x_e - 1/y_e|$

$d\hat{}(x\hat{},y\hat{}) = |x_e - y_e|^{1/p}$ , $p>1$

$d\hat{}(x\hat{},y\hat{}) = |x_e - y_e| / 1 + |x_e - y_e|$

$d\hat{}'(x\hat{},y\hat{}) = \min(1, d\hat{}(x\hat{},y\hat{}))$, donde $d\hat{}$ puede ser cualquiera de las distancias anteriores.

En lo sucesivo consideraremos los correspondientes índices éticos de distancia, introducidos en la definición (7), volviendo a utilizar la palabra distancia sin darle su sentido estricto.

Lo anterior pone de manifiesto que, en principio, para cada FBS regular existe una amplia gama de distancias. Sin embargo este conjunto de posibilidades se irá restringiendo al imponer condiciones ó axiomas adicionales.

Chakravarty y Dutta (1987) señalan que una distancia tendrá una significación ética sólo si está relacionada, de alguna manera, con la FBS que se está utilizando para ordenar los perfiles de renta. Proponen la siguiente

<u>Definición 8</u> : Si W es una FBS regular y d es una distancia ética, se dice que d es <u>coherente</u> con W si y sólo si se verifica

la siguiente condición:

$$|E(x) - E(y)| > |E(z) - E(t)| \Rightarrow d(x,y) > d(z,t) \qquad (8)$$

siendo x, y, z, t elementos cualesquiera de $R^n_+$

Dicha condición requiere que la distancia entre pares de distribuciones de renta guarde una relación de monotonía con el valor absoluto de la diferencia entre sus rentas equivalentes de equidistribución, aunque no impone ninguna restricción sobre la forma funcional de la dependencia entre $d(x,y)$ y $|x_e - y_e|$.

Veamos cuales de las distancias propuestas hasta el momento verifican (8).

Es satisfecha, evidentemente, por la distancia de Shorrocks $d(x,y) = |x_e - y_e|$.

Tambien la satisface $d(x,y) = |x_e - y_e|^{1/p}$ , $p>1$, al ser la función $f(x) = x^p$ , $x\geq 0$, $p>1$ estrictamente creciente.

Asimismo, la distancia $d(x,y) = |x_e - y_e| / 1 + |x_e - y_e|$ cumple la condición de coherencia, por ser estrictamente creciente la función $g(x) = x /1 + x$ , $x\geq 0$.

El resto de las distancias consideradas, no satisfacen (8), como puede comprobarse mediante sencillos contraejemplos.

Más adelante se considerarán otros axiomas que delimitarán, aún más, la gama de distancias éticas.

## 2.3. UN CASO PARTICULATR: FUNCIÓN DE BIENESTAR SOCIAL DE TIPO UTILITARISTA Y ADITIVAMENTE SEPARABLE.

Supongamos que la FBS $W: R^n_+ \rightarrow R$ es utilitarista y aditivamente separable. Esto es,

$$W(x) = \Sigma_i U(x_i) \tag{9}$$

siendo U la función de utilidad común a todos los individuos de la población. Se supone que U es creciente ($U'>0$) y estrictamente cóncava ($U''<0$), lo que equivale a que la utilidad marginal de la renta sea decreciente.

Es inmediato comprobar que la FBS definida por (9) es regular y, por lo tanto, existe para cada perfil, x, el nivel de renta equivalente de equidistribución, $x_e$, para el cual se verificará:

$$W(x) = \Sigma_i U(x_i) = W(x_e.1^n) = nU(x_e), \text{ de donde}$$

$$U(x_e) = 1/n\ \Sigma_i U(x_i) \tag{10}$$

Es decir, la utididad de $x_e$ coincide con la media aritmética de las utilidades que la distribución x proporciona a los individuos de la población.

A fin de poder concretar la forma funcional de U y a partir de ahí obtener una expresión explícita de $x_e$, vamos a suponer que la función de utilidad es tal que la elasticidad de la utilidad marginal respecto de la renta es constante. Esta hipótesis conduce a la FBS propuesta por Atkinson (1970).

Si $q_U(x) = -xU''(x)/U'(x)$ es dicha elasticidad, el anterior supuesto equivale a que el índice de desigualdad de Atkinson sea un índice relativo (Lambert,1989).

<u>Teorema 3</u>: Las funciones de utilidad para las que se verifica la condición "existe $p>0$ tal que $q_U(x) = p$, para todo $x>0$" son las de la forma

$$U_p(x) = a + bx^{1-p}/1-p,\ p\neq 1 \text{ a real y } b>0 \tag{11}$$
$$U_1(x) = a + b\ln x$$

El parámetro p representa el grado de aversión hacia la desigualdad, de modo que al crecer p aumenta dicha aversión, lo que equivale a una mayor concavidad de la función de utilidad. El siguiente teorema, demostrado por Pratt en el ámbito de la teoría de juegos, clarifica esta cuestión. Una demostración del mismo puede encontrarse en Lambert (1989).

Teorema 4: Si U y U^ son dos funciones de utilidad, son equivalentes:

a) $q_{U^\wedge}(x) > q_U(x)$, para todo $x>0$.

b) U^ es "más cóncava" que U, en el sentido de que U^ es una transformación estrictamente cóncava de U.

c) $x^\wedge_e < x_e$, para todas las distribuciones de renta.

Para las funciones de utilidad definidas en (11), es inmediato a partir de la igualdad (10) obtener para cada perfil de renta $x \in R^n_+$ su correspondiente REE.

$$x_{e,p} = (1/n\ \Sigma_i x_i^{1-p})^{1/1-p} \cdot \text{si } p \neq 1 \tag{12}$$

$$x_{e1} = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}\ , \tag{13}$$

media geométrica del perfil x.

Cuando p tiende hacia 0, la función de utilidad es lineal, $U_0(x) = a + bx$, esto es, la utilidad marginal de la renta es constante, la elasticidad $q_U(x)$ es nula, y estamos en el caso de la postura de neutralidad ante la desigualdad. En este supuesto $x_{e0} = m(x)$.

En el otro extremo del espectro de la aversión hacia la desigualdad, hemos de considerar lo que sucede cuando $p \rightarrow +\infty$. En tal caso se obtiene que $x_e \rightarrow \min x_i$, situación que corresponde al maximin rawlsiano. Estas consideraciones y las igualdades (12) y (13) nos permiten obtener expresiones para las distancias éticas definidas en el apartado 2.2.

En concreto, para la distancia $d(x,y) = |x_e - y_e|$ se tendría:

$d(x,y) = |m(x) - m(y)|$ si $p=0$

$d(x,y) = |mg(x) - mg(y)|$ si $p=1$

$d(x,y) = |h(x) - h(y)|$ si $p=2$

$d(x,y) = |\min x_i - \min y_i|$ si $p \to +\infty$, siendo $mg(x)$ y $h(x)$ la media geométrica y la media armónica, respectivamente, de la distribución x.

Análogamente se expresarían las diferentes distancias que hemos considerado en 2.2.

En definitiva, distancias de expresión tan sencilla como el valor absoluto de las diferencias de medias aritméticas, geométricas ó armónicas son distancias éticas, en el sentido de estar inducidas por una función de bienestar social.

## 2.4. AXIOMAS ADICIONALES.- UN TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN.

Tanto en el caso de las distancias éticas como en las de tipo estadístico propuestas por Ebert(1984) se considera deseable que cumplan los siguientes axiomas:

Homogeneidad lineal (HL): Para todo $c>0$ y cualesquiera sean $x, y \in R^n_+$, se verifica:

$$d(x,y) = d(cx, cy). \tag{14}$$

Este axioma indica que la distancia depende de las unidades en que se expresen x e y; si en ambas distribuciones tiene lugar una variación equiproporcional en todas las rentas, ello conlleva el mismo tipo de variación en la distancia.

Invariancia respecto a las traslaciones (IT): Si x e y son dos perfiles de renta y c un número real tal que $x + c.1^n$, $y + c.1^n \in R^n_+$, se cumple:

$$d(x,y) = d(x + c.1^n, y + c.1^n) \qquad (15)$$

De acuerdo con este axioma, el índice de distancia debería permanecer inalterado cuando todas las rentas en ambos perfiles aumentan (ó disminuyen) en la misma cantidad absoluta. Viene a ser un requerimiento análogo al propuesto por Kolm para los índices absolutos de desigualdad.

Normalización (N): Este axioma establece que la distancia entre un perfil dado y su correspondiente perfil igualitario viene dado por el índice de desigualdad de Blackorby-Donaldson-Kolm (BDK). Esto es:

$$d(x,m(x)) = A_I(x) = m(x) - x_e \qquad (16)$$

para todo $x \in R^n_+$, donde la FBS considerada deberá ser estrictamente S-cóncava a fin de asegurar la no negatividad de la distancia.

Si volvemos a considerar las distancias éticas definidas en el apartado 2.2 y nos restringimos a aquellas que satisfacen la condición de coherencia (definición 8) respecto a una FBS regular, es inmediato que

$$d(x,y) = |x_e - y_e|^{1/p}, \; p \geq 1$$

$$d(x,y) = |x_e - y_e| \,/\, 1 + |x_e - y_e|$$

cumplen ambas el axioma (IT) si la FBS es trasladable. Sin embargo, aún en el caso de que $E(x)=x_e$ sea distribucionalmente homogénea (definición 6), ninguna de ellas, salvo la primera cuando p=1, satisface el axioma (HL).

Así pues, la única distancia que cumple todas las condiciones y axiomas propuestos es $d(x,y)=|x_e - y_e|$. La validez de la proposición recíproca queda establecida en el siguiente teorema de caracterización debido a Chakravarty y Dutta (1987).

Teorema 5 : Un índice ético de distancia $d(x,y)=f(E(x),E(y))$, donde $f:R^2_+ \to R_+$ es una función contínua con $f(0,0)=0$ y $E:R^n_+ \to R_+$, $E(x)=x_e$, es la REE asociada a una FBS regular satisface los axiomas HL e IT si y sólo si

$$d(x,y) = k|E(x) - E(y)|, \; k>0,$$

siendo E distribucionalmente homogénea.

Además d satisface también el axioma de normalización si y sólo si k=1.

Cuando E es distribucionalmente homogénea, la distancia de Shorrocks, que acabamos de caracterizar, puede expresarse en función del índice absoluto de desigualdad de BDK, $A_1(x)$:

$$d(x,y) = |(m(x)-A_1(x)) - (m(y)-A_1(y)| \tag{17}$$

ó bien a partir del índice relativo de AKS, $I_3(x)$:

$$d(x,y) = |m(x)(1-I_3(x)) - m(y)(1-I_3(y))| \tag{18}$$

Las expresiones (17) y (18) ponen de manifiesto la noción intuitiva de que una medida de distancia entre distribuciones de renta depende del aspecto eficiencia (renta per cápita) y del aspecto equidad (representado por los índices de desigualdad).

A partir de las propiedades de la función $E(x)=x_e$, se tiene:

Proposición 5: La distancia $d(x,y)=|x_e - y_e|$ satisface las siguientes propiedades:

a) $\forall x \in R^n_+, d(x+c.1^n,x)=|(x+c.1^n)_e - x_e|=c$, $c>0$.

Si en una distribución dada todas las rentas se aumentan en una misma cantidad absoluta c, la distancia entre la distribución inicial y la aumentada es c. Es un resultado razonable ya que una distancia debe reflejar la diferencia entre el bienestar medio de las poblaciones.

b) Si $a,b>0$, $d(a.1^n, b.1^n) = |a - b|$.

Es decir, cuando en ambas poblaciones las rentas están igualmente distribuidas, la distancia sólo depende de la renta per cápita.

c) $\forall x \in R^n_+, d(x, 0.1^n) = x_e$.

La distancia entre cualquier perfil de renta, x, y el origen de $R^n_+$ es la renta equivalente de equidistribución, $x_e$.

Hasta ahora hemos considerado poblaciones de tamaño fijo n. Este supuesto simplifica la notación y no supone una restricción esencial, ya que todos los resultados obtenidos son válidos cuando se comparan poblaciones de distinto tamaño. Basta imponer que la FBS satisfaga el siguiente

Principio de Población de Dalton (PP).: Si y es una k-réplica de $x \in R^n_+$, $W^{nk}(y)=W^n(x)$.

Chakravarty(1990,p.115) demuestra que si W es regular, satisface el (PP) de Dalton si, y sólo si $\forall (x,y) \in R^n_+ * R^m_+$, se verifica $W^n(x)=W^m(y) \leftrightarrows E^n(x)=E^m(y)$.

En relación al concepto de distancia ética, definición 7, hay que imponer una condición adicional:

Si $x \in R^n_+$, $y \in R^m_+$, se verifica $d_{n,m}(x,y)=d_{nk,mk}(x^{(k)},y^{(k)})$, donde $x^{(k)}$ e $y^{(k)}$ son k-réplicas de x e y.

## 3. DISTANCIAS DE TIPO ESTADÍSTICO.

### 3.1. LAS DISTANCIAS PROPUESTAS POR DAGUM: $d_0$ y $d_1$.

Dagum (1980,1987) supone que la renta media de una población define su nivel de afluencia. Sean $Q_1$ y $Q_2$ dos poblaciones de unidades económicas en las que la variable renta tiene como funciones de distribución $F_1(y)$ y $F_2(y)$, y rentas medias $m_1=E_1(y)$, $m_2=E_2(y)$, siendo $m_2>m_1$.

Para definir las distancias $d_0$ y $d_1$ se toma la distribución con mayor media, en este caso la de la población $Q_2$, como referencia, y se compara con la segunda distribución. Para que ambas tengan una representación formal unificada utilizaremos una función indicador $I(y-x)$ que toma el valor 1 si $y>x$, el valor 1/2 si $y=x$, y el valor 0 si $y<x$.

Definición 9. La distancia $d_0$ es la proporción esperada de rentas en la población $Q_1$ que son menores que cualquier renta seleccionada arbitrariamente en $Q_2$. Esto es,

$$\begin{aligned} d_0 &= P(Y>X/m_2>m_1) = E(I(Y-X)/m_2>m_1) = \\ &= \int_0^\infty (\int_0^y dF_1(x))dF_2(y) = E_2(F_1(y)). \end{aligned} \tag{19}$$

En el caso discreto, si $x=(x_1,x_2,..,x_n)$, $y=(y_1,y_2,..,y_m)$, siendo $m(y)>m(x)$, resulta:

$$d_0(x,y) = (1/nm)\ \Sigma_{i=1}^{m}\ \Sigma_{j=1}^{n}\ I(y_i - x_j). \tag{20}$$

Por consiguiente, con la distancia $d_0$ se comparan las rentas de ambas distribuciones y se realiza un recuento para evaluar la proporción de unidades económicas de la población más rica que perciben mayor renta que las de la otra población, pero sin tener en cuenta la cantidad de renta en que dichas unidades difieren.

A partir de la definición 1 es evidente que $0<d_0(x,y)\leq 1$, alcanzando el valor máximo 1 cuando $y_i>x_j$, $\forall i,j$.

Dagum afirma que $\min d_0=1/2$. Ello es falso como pone de manifiesto Shorrocks (1982). En efecto, si $x=(3,3,3)$, $y=(2,1,9)$, es $m(x)=3$, $m(y)=4$. Tomando y como distribución de referencia, $d_0(x,y)=1/3<1/2$. En general si $x,y\in R^n_+$, dado x se elige y de modo que tenga n-1 rentas menores que la menor renta de x, junto con una componente lo suficientemente grande para que $m(y)>m(x)$. Con esta elección $d_0\leq 1/n$.

Otras limitaciones de $d_0$ se derivan del hecho de no cumplir los axiomas que definen una distancia:

No está definida para todos los pares de perfiles de renta, ya que inicialmente se ha excluido el comparar distribuciones con idéntica media. Dagum justifica esta restricción en aras de simplificar la notación, pero en la práctica tiene un mayor alcance. Si $m(x)=m(y)$, cualquiera de las dos distribuciones se podría tomar como referencia y sería lógico que la distancia, en uno y otro caso, coincidiese. Sin embargo no sucede así. Veamos un ejemplo: si $x=(3,3,3)$, $y=(2,1,6)$, es $m(x)=m(y)=3$; si se toma x como referencia, $d_0(x,y)=1/3$, mientras que tomando y se obtiene $d'_0(x,y)=2/3$.

No cumple la propiedad reflexiva, ya que, en principio, $d_0(x,x)$ no está definido. Si se permitiese comparar distribuciones idénticas, dado que $I(0)=1/2$, se obtendría $d_0(x,x)=1/2\neq 0$.

En cuanto a la desigualdad triangular, tampoco se satisface. En efecto, si $x=(2,2)$, $y=(1,1,8)$, $z=(3,3)$, es $m(x)<m(z)<m(y)$, con lo cual $d_0(x,y)=1/3$, $d_0(y,z)=1/3$, $d_0(x,z)=1$, no cumpliéndose $d_0(x,z)\leq d_0(x,y)+d_0(y,z)$.

En definitiva, $d_0$ no es una distancia. Si se considera como medida del nivel de riqueza de una distribución con respecto a otra ocurre que $d_0(x,y)=1$ siempre que ambas distribuciones no se solapen, independientemente de los niveles concretos de renta.

Para tener en cuenta las diferencias de renta entre las unidades económicas de las poblaciones consideradas, introduce Dagum una nueva distancia.

<u>Definición 10.</u> La distancia económica $d_1$ entre dos distribuciones de renta $F_1$ y $F_2$ es la suma ponderada de la diferencia de renta Y-X, para todo Y>X, dado que $m_2>m_1$. El factor de ponderación es la función de densidad conjunta $f_1(x)f_2(y)$. Por

lo tanto,

$$d_1 = E[(Y-X)I(Y-X)/m_2>m_1] = \int_0^\infty \left(\int_0^y (y-x)\,dF_1(x)\right)dF_2(y). \qquad (21)$$

Es sencillo comprobar que

$$d_1 = E_1(yF_2)+E_2(yF_1)-E_1(y).$$

En el caso discreto,

$$d_1(x,y) = (1/nm)\Sigma_i\Sigma_j\ (y_i-x_j)I(y_i-x_j) = 1/2(m(y)-m(x)) +$$
$$+ (1/2nm)\Sigma_i\Sigma_j\ |y_i-x_j| = 1/2(m(y)-m(x)) + (1/2)\Delta_1 \qquad (22)$$

siendo $\Delta_1$=E(|Y-X|) la diferencia media de Gini entre ambas distribuciones de renta.

Como medida de distancia económica $d_1$ supone una mejora respecto a $d_0$. Además de tener en cuenta las diferencias de renta, cumple la desigualdad triangular y puede extenderse a una función sobre el dominio cuyos elementos son todos los posibles pares de distribuciones. Si se realiza esta extensión, $d_1(x,x)$ está bien definida aunque no se satisface la propiedad reflexiva de la distancia, ya que

$$d_1(x,x) = (1/n^2)\ \Sigma_i\Sigma_j|x_i-x_j| = m(x)G(x)$$

donde G(x) es el índice de Gini de la distribución x, que será positivo a no ser que $x_i$=m(x) para todo i.

En el caso de comparar distribuciones con igual media, tomando una u otra como referencia, se verifica la propiedad simétrica ya que $d_1(x,y)=d_1(y,x)=\Delta_1/2$.

### 3.2. LAS DISTANCIAS PROPUESTAS POR EBERT.

Ebert (1984) caracteriza a partir de un enfoque axiomático una clase de medidas de distancia entre perfiles de renta, basadas en la función de distribución de esa variable.

Utiliza el concepto que introdujo Gastwirth (1971) de inversa generalizada de una función de distribución a fin de obtener una definición de la curva de Lorenz que se pudiese aplicar tanto a variables aleatorias contínuas como discretas.

Si $F:R \to [0,1]$ es una función de distribución y no es diferenciable con continuidad, no se puede asegurar la existencia de la inversa de F. No obstante,

<u>Definición 11.</u> La <u>inversa generalizada</u> de F viene dada por $F^{-1}(t) = \inf_u \{u: F(u) \geq t\}$, para t perteneciente al recorrido de F.

Por supuesto, la inversa generalizada de F coincide con la inversa en el sentido usual, si ésta existe. Además, al ser F monótona no decreciente, también lo es $F^{-1}$, por lo que presentará un conjunto numerable de puntos de discontinuidad, lo que implica su integrabilidad.

En concreto, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una distribución discreta de renta, y suponemos ordenadas sus componentes de menor a mayor, se tiene:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < x_1 \\ \frac{k}{n} & si \quad x_k \leq x < x_{k+1},\ k=1,2,\ldots n-1 \\ 1 & si \quad x \geq x_n \end{cases}$$

La correspondiente inversa generalizada viene dada por:

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} x_k & si \quad \frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Algunas propiedades sencillas de $F^{-1}$ se enumeran en la siguiente

Proposición 6.

a) $\int_0^1 F_x^{-1}(t)dt = (1/n)\ \Sigma x_i = m(x)$.

b) $F_x^{-1}$ es independiente de la ordenación de las componentes del vector x.

c) $F_x^{-1}$ no depende del tamaño de la distribución. Si $x^{(k)}$ es la distribución $(x_1,..,x_1,...,x_n,..x_n)$, donde $x_i$ se repite k veces, $k\in N$, se verifica $F_x^{-1} = F_{xk}^{-1}$.

d) Si las inversas $F_x^{-1}$ y $F_y^{-1}$ coinciden, las distribuciones x e y sólo pueden diferir en el tamaño (una es una k-réplica de la otra) o en la ordenación.

La definición de medidas de distancia que adopta Ebert (1984,pag.268) recoge las propiedades clásicas de aquella (no negatividad, simetría, desigualdad triangular) modificando la propiedad reflexiva al imponer la condición

"$d(x,y)=0 \rightleftarrows F_x^{-1} = F_y^{-1}$ "

lo que supone identificar aquellas distribuciones de renta cuyas inversas generalizadas coinciden, y que según el apartado d) de la Proposición anterior sólo diferirán en el tamaño o en la ordenación de sus componentes.

Añade una propiedad adicional encaminada a que las medidas que obtiene no dependan del tamaño de la población: si $x^{(k)}$ e $y^{(l)}$ son réplicas de x e y, se verifica

$$d_{m,n}(x,y) = d_{mk,nl}(x^{(k)},y^{(l)})$$

Entre los axiomas que impone Ebert a sus medidas de distancia, nos volvemos a encontrar algunos de los impuestos por Chakravarty y Dutta, tales como el de Homogeneidad Lineal(HL), formulado en los mismos términos que aparece en la igualdad (14) del apartado 2.4, y el de Invariancia respecto a las trastaciones(IT), aunque este con una formulación más restrictiva al exigir la siguiente condición:

$d(x,y) = d(x+z,y+z)$, $x,y,z \in R^n_+$ con tal de que $x+z$ e $y+z$ conserven la ordenación creciente de las componentes de x e y. En el caso de las distancias éticas $z=(c,c,....,c)$.

El resto de los axiomas que caracterizan a las medidas de Ebert tienen un contenido de carácter matemático pues, en definitiva, en el citado artículo lo que se hace es adaptar al conjunto de distribuciones de renta unas distancias que son clásicas en el Análisis Funcional.

La expresión general de las distancias estadísticas caracterizadas por Ebert viene dada por:

$$d^r(x,y) = \left( \int_0^1 |F_x^{-1}(t)-F_y^{-1}(t)|^r \, dt\right)^{1/r}, \quad r \geq 1. \qquad (23)$$

En el caso discreto, si $x,y \in R^n_+$ y tienen ordenadas sus componentes de forma creciente, se tiene

$$d^r(x,y) = \left((1/n) \ \Sigma_i |x_i-y_i|_r \ \right)^{1/r}. \qquad (24)$$

En ambos casos $d^r(x,y)$ es una función creciente del parámetro r[3].

Si $r=1$, $d^1(x,y)=(1/n)\Sigma_i|x_i-y_i|$ es la media aritmética de las diferencias absolutas de rentas.

Para $r=2$, $d^2(x,y)$ es la media cuadrática de dichas diferencias.

En general $d^r(x,y)$ será una media de orden r.

Cuando $r \to \infty$, $d^r(x,y) \to \max_i|x_i-y_i|$, obteniéndose como distancia la máxima diferencia absoluta de renta.

---

[3] Chakravarty (1990) demuestra que estas distancias <u>no son coherentes</u> con ninguna FBS regular y S-cóncava (no cumplen la definición 8 del apartado 2.2).

A partir de las definiciones es sencillo establecer la siguiente

<u>Proposición 7.</u> Para toda distribución de renta $x \in R^n_+$ se verifica:

a) $d^r(x+c.1^n,x) = c$, para todo $c>0$.

b) $d^1(x,0.1^n) = m(x)$.

c) $d^r(a.1^n,b.1^n) = |a-b|$, siendo $a,b>0$.

Volvemos a encontrar propiedades análogas a las obtenidas en el caso de las distancias éticas.

Por otra parte, cada $d^r$ puede utilizarse como una medida de desigualdad haciendo $y=m(x).1^n$. En efecto, $d^r(x,m(x).1^n)$ es el momento central de orden r para la distribución x.

Si $r=1$, $d^1(x,m(x).1^n) = (1/n)\ \Sigma_i|x_i-m(x)|$, es la desviación media de x.

Para $r=2$, $d^2(x,m(x).1^n) = ((1/n)\Sigma_i(x_i-m(x))^2)^{1/2}$, se obtiene la desviación típica de x.

Dado que todos esos momentos son invariantes frente a los cambios de origen, las medidas de distancia obtenidas por Ebert son generalizaciones razonables de las medidas de desigualdad absoluta.

## 4. UNA APLICACIÓN: DISTANCIAS ECONÓMICAS ENTRE LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS DE ESPAÑA.

En este apartado vamos a calcular las distancias económicas entre las diferentes Comunidades Autónomas y el Conjunto Nacional, así como entre aquellas y Andalucia, utilizando la distancia propuesta por Shorrocks[4].

Con información procedente de la Encuesta de Presupuestos Familiares (EPF), 1980-81, se han calculado, para las distintas Comunidades Autónomas y para el conjunto nacional, las rentas equivalentes de equidistribución asociadas a las FBS obtenidas a partir de los índices de Gini (G) y Theil (T). Las representaremos por $x_{eG}$ y $x_{eT}$ *respectivamente.*

Según lo expuesto en el apartado 2.1, se tiene:

$$x_{eG} = m(1 - G); \quad x_{eT} = m(1 - T)$$

siendo m, en este caso, el ingreso medio anual por hogar expresado en pesetas.

En la siguiente Tabla se muestran los resultados obtenidos.

**TABLA 1**

| | $m$ | $G$ | $T$ | $x_{eG}$ | $x_{eT}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ANDALUCIA | 627.821 (16) | 0.37176 | 0.19862 | 394.422(16) | 503.123 (16) |
| ARAGON | 738.552 (10) | 0.37694 | 0.21782 | 460.162(11) | 577.680 (11) |
| ASTURIAS | 768.813 (7) | 0.33838 | 0.15889 | 508.662 (7) | 646.656 (7) |
| BALEARES | 749.261 (9) | 0.36188 | 0.18174 | 478.118(10) | 613.090 (9) |
| CANARIAS | 696.201 (13) | 0.36469 | 0.19369 | 442.303(13) | 561.353 (13) |
| CANTABRIA | 840.534 (5) | 0.34849 | 0.19858 | 547.616 (5) | 677.730 (5) |
| CASTILLA Y LEON | 684.131 (14) | 0.38507 | 0.21912 | 420.962(15) | 537.795 (15) |
| CASTILLA-LA MANCHA | 554.098 (17) | 0.37297 | 0.21912 | 347.436(17) | 432.684 (17) |
| CATALUÑA | 906.072 (4) | 0.33367 | 0.19442 | 603.742 (4) | 729.913 (4) |
| C. VALENCIANA | 756.958 (8) | 0.35651 | 0.20970 | 487.095 (8) | 598.223 (10) |
| EXTREMADURA | 492.724 (18) | 0.37235 | 0.19649 | 309.258(18) | 395.908 (18) |
| GALICIA | 699.215 (12) | 0.36469 | 0.18725 | 444.218(12) | 568.286 (12) |

[4]. Son, por lo tanto, distancias de tipo ético. El cálculo de las de tipo estadístico es más laborioso, ya que previamente es necesario especificar y ajustar una función de distribución de la renta para España y para cada Comunidad Autónoma.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| MADRID | 970.819 (1) | 0.36615 | 0.19381 | 615.353 (2) | 782.664 (2) |
| MURCIA | 648.274 (15) | 0.34441 | 0.16572 | 425.002(14) | 540.842 (14) |
| NAVARRA | 955.478 (2) | 0.35726 | 0.20112 | 614.124 (3) | 763.312 (3) |
| PAIS VASCO | 931.307 (3) | 0.31715 | 0.14132 | 635.942 (1) | 799.694 (1) |
| LA RIOJA | 733.652 (11) | 0.29367 | 0.11555 | 518.200 (6) | 648.878 (6) |
| CEUTA-MELILLA | 790.767 (6) | 0.38652 | 0.21038 | 485.120 (9) | 624.405 (8) |
| | | | | | |
| CONJUNTO NACIONAL | 768.489 | 0.37249 | 0.20905 | 482.234 | 607.836 |

En la Tabla 1 junto a cada valor de m, $x_{eG}$ y $x_{eT}$ figura un número entre paréntesis que indica el lugar que, respecto a cada magnitud, ocupa la correspondiente Comunidad Autónoma, según una ordenación decreciente.

Se observa en ella que según el ingreso anual medio por hogar (m) el primer lugar lo ocupa Madrid, figurando a continuación Navarra, el Pais Vasco y Cataluña. Al considerar las rentas equivalentes, los cuatro primeros lugares son ocupados por las mismas comunidades, aunque alterándose el orden. Pasa al primer lugar el Pais Vasco, seguido de Madrid, Navarra y Cataluña. Ello se debe a que según los índices G y T, el reparto del ingreso en el Pais Vasco es más igualitario que en Navarra y Madrid.

Las comunidades en las que el bienestar social, según estos criterios, es menor son Andalucia, Castilla - La Mancha y Extremadura. En este caso las ordenaciones inducidas por m, $x_{eG}$, y $x_{eT}$ coinciden.

En general la correlación ordinal que se observa en la Tabla 1 es muy elevada. Así lo confirma el coeficiente de Spearman, que toma los siguientes valores:

$$r_S(m,x_{eG})=0.955;\ r_S(m,x_{eT})=0.957;\ r_S(x_{eG},x_{eT})=0.994,$$

todos ellos muy próximos al valor 1.

Lo anterior parece indicar que en las comparaciones de bienestar entre distintas poblaciones incide más el "tamaño de la tarta" (m) que la uniformidad en el reparto (G,T), siempre que no haya entre ellas diferencias muy sensibles en los índices de desigualdad.

Destaca el caso de La Rioja, ya que según su renta media por hogar ocupa el lugar 11, y según las rentas equivalentes de equidistribución el lugar 6. En función de los valores de G y T, esta comunidad es la que presenta mayor uniformidad en la distribución del ingreso.

A partir de los valores de la Tabla 1 se ha calculado la distancia económica entre cada Comunidad Autónoma y el conjunto nacional. Se han considerado tres medidas:

$$d_m(x,y) = |m(x) - m(y)|$$
$$d_G(x,y) = |x_{eG} - y_{eG}|$$
$$d_T(x,y) = |x_{eT} - y_{eT}|$$

que son las distancias de Shorrocks asociadas a tres FBS: una que implica una postura de neutralidad ante la desigualdad ($d_m$), y las obtenidas a partir del índice de Gini ($d_G$) y de Theil ($d_T$).

Los resultados se recogen en la Tabla 2.

**TABLA 2. Distancias económicas entre el conjunto nacional y las CC.AA.**

| | $d_m$ | $d_G$ | $d_T$ |
|---|---|---|---|
| ANDALUCIA | 140.668 (13-) | 87.812 (12+) | 104.713 (12-) |
| ARAGON | 29.937 (5-) | 22.072 (4+) | 30.156 (4-) |
| ASTURIAS | 324 (1+) | 26.428 (5+) | 38.820 (5+) |
| BALEARES | 19.228 (3-) | 4.116 (2-) | 5.254 (1+) |
| CANARIAS | 72.288 (9-) | 39.931 (8-) | 46.483 (8-) |
| CANTABRIA | 72.045 (8+) | 65.382 (11+) | 69.894 (10+) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| CASTILLA Y LEON | 84.358 (10-) | 61.272 (10-) | 70.041 (11-) |
| CASTILLA-LA MANCHA | 214.391 (17-) | 134.798 (16-) | 175.152 (16-) |
| CATALUÑA | 137.583 (12+) | 121.508 (13+) | 122.077 (13+) |
| C. VALENCIANA | 11.531 (2-) | 4.861 (3+) | 9.613 (2-) |
| EXTREMADURA | 275.765 (18-) | 172.976 (18-) | 211.928 (18-) |
| GALICIA | 69.274 (7-) | 38.016 (7-) | 39.550 (6-) |
| MADRID | 202.330 (16+) | 133.119 (15+) | 174.828 (15+) |
| MURCIA | 120.215 (11-) | 57.232 (9-) | 66.994 (9-) |
| NAVARRA | 186.989 (15+) | 131.890 (14+) | 155.476 (14+) |
| PAIS VASCO | 162.818 (14+) | 153.708 (17+) | 191.858 (17+) |
| LA RIOJA | 34.837 (6-) | 35.966 (6+) | 41.042 (7+) |
| CEUTA - MELILLA | 22.278 (4+) | 2.886 (1+) | 16.569 (3+) |

A la izquierda de cada valor figura junto al número que indica el lugar que ocupa cada comunidad en una ordenación decreciente de la distancia, el signo + o - según que la magnitud que, en cada caso, se esté utilizando para el cálculo de dicha distancia sea, en esa comunidad, superior ó inferior a la del conjunto nacional.

Respecto a $d_m$, presentan un nivel de bienestar muy próximo a la media nacional Asturias, la C. Valenciana, Baleares y Ceuta-Melilla. Las mayores distancias las presentan Extremadura y Castilla-La Mancha, con niveles de bienestar muy inferiores a la media, así como, en el sentido opuesto, Madrid y Navarra.

Utilizando $d_G$ y $d_T$, que incorporan el aspecto desigualdad, los niveles de bienestar más próximos al conjunto nacional son los de Baleares, Ceuta-Melilla y la C. Valenciana. Los más alejados son los de Extremadura, Pais Vasco, Castilla-La Mancha y Madrid, aunque por situaciones muy diferentes.

Tambien en este caso la correlación ordinal es muy elevada.

$$r_S(d_m,d_G)=0.942;\quad r_S(d_m,d_T)=0.950;\quad r_S(d_G,d_T)=0.989$$

Finalmente, en la Tabla 3, utilizando las mismas medidas que en la anterior, se recogen las distancias entre Andalucia y el resto de las Comunidades Autónomas.

**TABLA 3. Distancias económicas entre Andalucia y las restantes CC.AA.**

| | $d_m$ | $d_G$ | $d_T$ |
|---|---|---|---|
| ARAGON | 110.731 (7) | 65.740 (6) | 74.557 (6) |
| ASTURIAS | 140.992 (11) | 114.240 (11) | 143.533 (11) |
| BALEARES | 121.440 (8) | 83.696 (7) | 109.967 (9) |
| CANARIAS | 68.380 (3) | 47.881 (3) | 58.230 (3) |
| CANTABRIA | 212.713 (13) | 153.194 (13) | 174.607 (13) |
| CASTILLA Y LEON | 56.310 (2) | 26.270 (1) | 34.672 (1) |
| CASTILLA-LA MANCHA | 72.723 (5) | 46.986 (4) | 70.439 (5) |
| CATALUÑA | 278.251 (14) | 209.320 (14) | 226.790 (14) |
| C. VALENCIANA | 129.137 (9) | 92.637 (10) | 95.100 (7) |
| EXTREMADURA | 135.097 (10) | 85.164 (8) | 107.215 (8) |
| GALICIA | 71.394 (4) | 49.796 (5) | 65.163 (4) |
| MADRID | 342.998 (17) | 220.931 (16) | 279.541 (16) |
| MURCIA | 20.453 (1) | 30.580 (2) | 37.719 (2) |
| NAVARRA | 327.657 (16) | 219.702 (15) | 260.189 (15) |
| PAIS VASCO | 303.489 (15) | 241.520 (17) | 296.571 (17) |
| LA RIOJA | 105.831 (6) | 123.778 (12) | 145.755 (12) |
| CEUTA-MELILLA | 162.946 (12) | 90.698 (9) | 121.282 (10) |

Se observa en la tabla anterior que el nivel de bienestar de la comunidad andaluza es similar al de Murcia, Castilla-León y Canarias. Está, sin embargo, alejado de los que se dan en el Pais Vasco, Madrid, Navarra y Cataluña.

## 5. CONCLUSIÓN.

Las distancias económicas que hemos analizado tienen una finalidad común: comparar y medir el nivel de bienestar existente en dos poblaciones, a partir de sus respectivas distribuciones de renta. No obstante, cada medida adopta un enfoque diferente.

Las distancias éticas están, cada una de ellas, ligadas a una función de bienestar social y se expresan a partir del nivel de renta equivalente de equidistribución, $x_e$, que es un concepto, introducido por Atkinson (1970), atractivo desde el punto de vista teórico, pero que como señalan algunos autores, por ejemplo Dagum, conduce a una situación un tanto chocante con la realidad: a una sociedad le debería ser indiferente el que cada unidad económica tenga una renta igual a $x_e$ o una distribución desigual con renta media $m(x)>x_e$. Por otra parte, la interpretación de $x_e$, en términos de bienestar social, entra en contradición con los procesos económicos reales, con los principios, generalmente aceptados, de justicia distributiva, y con la teoría económica de la distribución, que retribuye los factores de producción según el principio de la productividad marginal.

En el caso de las distancias de tipo estadístico, basadas en la función de distribución de la varíable renta, los enfoques de Dagum y Ebert son muy diferentes. El primero define unas medidas que formalmente no son distancias, pues no cumplen los axiomas correspondientes a ese concepto, pero que proporcionan, sin duda, un criterio para medir diferencias de bienestar entre poblaciones. Las críticas de Shorrocks (1982) a las medidas propuestas pór Dagum (1980,1987) se centran en el incumplimiento de esos axiomas, quizás sin tener en cuenta que los trabajos citados tenian una perspectiva más amplia, al pretender proporcionar medidas de desigualdad entre distribuciones de renta.

Por su parte, el trabajo de Ebert tiene un enfoque axiomático, lo que supone un punto de contacto con los de Chakravarty y Dutta, si bien gran parte de los axiomas son de contenido esencialmente matemático, más que económico, pues en este caso se trata de adaptar al conjunto de distribuciones de renta, distancias muy conocidas y utilizadas en los espacios funcionales.

**BIBLIOGRAFIA.**


- ATKINSON, A. B. (1970): " On the measurement of inequality". Jouunal of Economic Theory, 2, 244-263.
- BLACKORBY, CH. and DONALDSON, D. (1978): "Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare". Journal of Economic Theory, 18, 59-80.
- BLACKORBY, CH. and DONALDSON, D. (1980): "A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality". International Economic Review, Vol 21,1.
- CHAKRAVARTY, S.R. and DUTTA, B. (1987): "A Note on Measures of Distance between Income Distributions". Journal of Economic Theory, 41, 185-188.
- CHAKRAVARTY, S.R. (1990): Ethical Social Index Numbers. Springer-Verlag, New York.
- DAGUM, C. (1980): "Inequality Measures between Income Distributions with Applications". Econometrica, Vol 48, 7.
- DAGUM, C. (1987): "Measuring the Economic Affluence Between Populations of Income Receivers". Journal of Business and Economic Statistics, Vol, 5, 1.
- EBERT, U. (1984): "Measures of Distance between Income Distributions". Journal of Economic Theory, 32, 266-274.
- ENCUESTA DE PRESUPUESTOS FAMILIARES, 1980-81. Instituto Nacional de Estadística, Madrid, 1983.
- GASTWIRTH, J.L. (1972): "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index". Review of Economics and Statistics, 54.
- LAMBERT, P.J. (1989): "The Distribution and Redistribution of Income". Blackwell, Oxford.
- SHORROCKS, A. F.(1982): "On the Distance between Income Distributions". Econometrica, Vol. 50, 5.